Identités remarquables

Rappel de cours

Dans la suite, on considère a et b deux nombres quelconques.

Carré de la somme : $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$ (car $ab = ba$)

Carré de la différence : $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$ (car $ab = ba$)

Produit de la somme et de la différence :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$
$= a^2 - b^2$ (car $ab = ba$)

Exercice 1

A l'aide d'une identité remarquable, calculer mentalement :

$$31^2 \;;\; 48^2 \;;\; 38\times 42 \;;\; 65\times 75 \;;\; 63^2-61^2 \;.$$

Exercice 2

Considérons y un nombre quelconque.
Développer et réduire les expressions suivantes.

$$A(y)=(3y-4)^2 \;;\; B(y)=6y+(5y-2)^2 \;;\; C(y)=(y+1)^2-(2y+3)(2y-3)$$

Exercice 3

Considérons a un nombre quelconque.
Factoriser les expressions suivantes.

$$D(a)=36-a^2 \;;\; E(a)=a^2+2a+1 \;;\; F(a)=16a^2-24a+9$$

$$G(a)=(a+4)^2-25$$

Exercice 4

Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre entier Lui ajouter 6 Elever le résultat au carré Soustraire au résultat le carré du nombre de départ

Paul pense que le résultat du programme de calcul sera toujours un multiple de 3. **Qu'en pensez-vous ?**

Exercice 5

Quand on augmente un entier de 3, son carré augmente de 57.
Quel est cet entier ?

Correction

Exercice 1

$$
\begin{aligned}
31^2 &= (30+1)^2 \\
&= 30^2+2\times30\times1+1^2 \\
&= 900 + 60 + 1 \\
&= \mathbf{961}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
38\times42 &= (40-2)\times(40+2) \\
&= 40^2-2^2 \\
&= 1600 - 4 \\
&= \mathbf{1596}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
48^2 &= (50-2)^2 \\
&= 50^2-2\times50\times2+2^2 \\
&= 2500 - 200 + 4 \\
&= \mathbf{2304}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
65\times75 &= (70-5)\times(70+5) \\
&= 70^2-5^2 \\
&= 4900 - 25 \\
&= \mathbf{4875}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
63^2-61^2 &= (63-61)\times(63+61) \\
&= 2\times124 \\
&= \mathbf{248}
\end{aligned}
$$

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
A(y)&=(3y-4)^2 \\
&= (3y)^2-2\times3y\times4+4^2 \\
&= \mathbf{9y^2-24y+16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(y)&=6y+(5y-2)^2 \\
&= 6y+(5y)^2-2\times5y\times2+2^2 \\
&= 6y+25y^2-20y+4 \\
&= \mathbf{25y^2-14y+4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(y)&=(y+1)^2-(2y+3)(2y-3) \\
&= y^2+2\times y\times1+1^2-((2y)^2-3^2) \\
&= y^2+2y+1-(4y^2-9) \\
&= y^2+2y+1-4y^2+9 \\
&= \mathbf{-3y^2+2y+10}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

$$
\begin{aligned}
D(a)&=36-a^2 \\
&= 6^2-a^2 \\
&= \mathbf{(6-a)(6+a)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(a)&=a^2+2a+1 \\
&= \mathbf{(a+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(a)&=16a^2-24a+9 \\
&= (4a^2)-2\times4a\times3+3^2 \\
&= \mathbf{(4a-3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(a)&=(a+4)^2-25 \\
&= (a+4)^2-5^2 \\
&= (a+4-5)(a+4+5) \\
&= \mathbf{(a-1)(a+9)}
\end{aligned}
$$

Exercice 4

Si on appelle x le nombre entier choisi au départ alors le programme de calcul peut se traduire par l'expression littérale suivante : $(x+6)^2-x^2$.

De plus on a :

$$
\begin{aligned}
(x+6)^2-x^2 &= x^2+2\times x\times6+6^2-x^2 \\
&= x^2+12x+36-x^2 \\
&= 12x+36 \\
&= 3(4x+12)
\end{aligned}
$$

donc $(x+6)^2-x^2$ est un multiple de 3.

Donc Paul a raison.

Exercice 5

On appelle n l'entier cherché.

Quand on augmente cet entier de 3, son carré augmente de 57 d'où on en déduit l'équation : $(n+3)^2=n^2+57$

$$
\begin{aligned}
n^2+2\times n\times3+3^2&=n^2+57 \\
n^2+6n+9&=n^2+57 \\
6n+9&=57 \\
6n&=48 \\
n&=\frac{48}{6} \\
n&=8
\end{aligned}
$$

L'entier cherché est 8.