Agrandissements/Réductions/Triangles semblables (GM3)

Introduction

Nous représentons très souvent dans la vie des maquettes d'objets, des plans, des cartes. Ces maquettes, ces plans,... sont soit des « agrandissements » ou des « réductions » d' objets réels.

Dans cette leçon, nous allons étudier quelques propriétés de ces « agrandissements/réductions ».

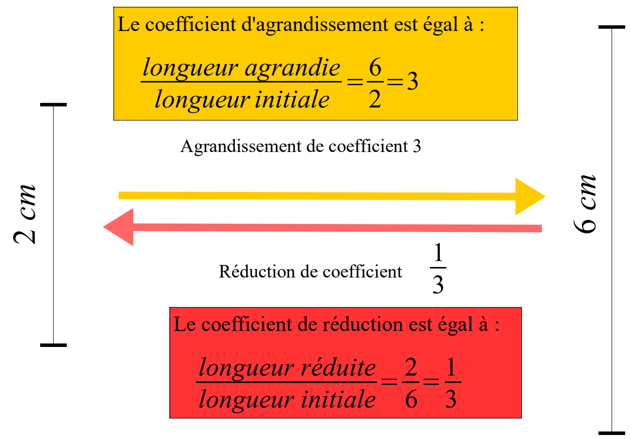
1) Que sont un agrandissement et une réduction ?

Définitions

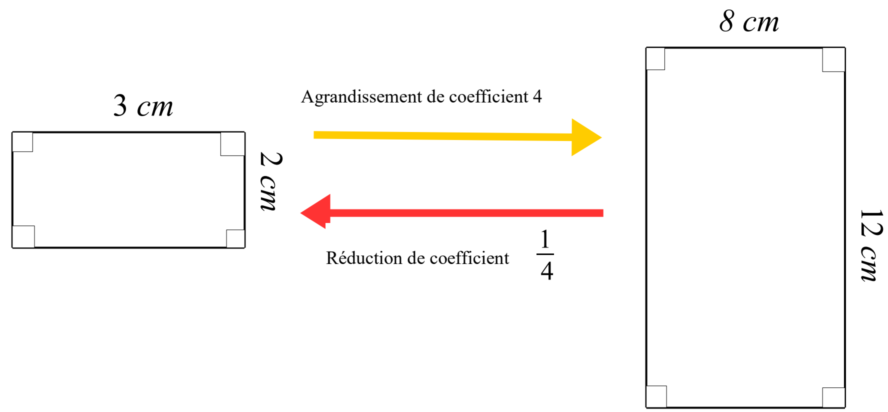
Faire **un agrandissement** d'une figure c'est multiplier toutes les longueurs par un même nombre k avec k>1.
k est appelé **le coefficient d'agrandissement.**

Faire **une réduction** d'une figure c'est multiplier toutes les longueurs par un même nombre k avec 0<k<1.
k est appelé **le coefficient de réduction**.

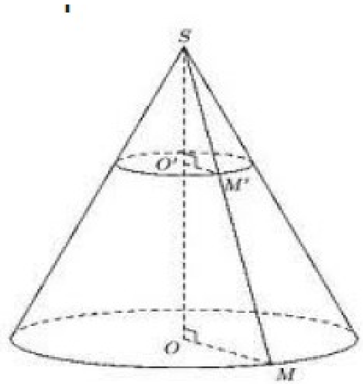
Exemple 1 Agrandissement ou réduction d'un segment



Exemple 2 Agrandissement ou réduction d'un rectangle



Exemple 3 Agrandissement ou réduction d'un cône



SO = 12 cm

SO' = 3 cm

Le cône de hauteur SO' et de rayon de base O'M' est une réduction du cône de hauteur SO et de rayon de base OM .

Le coefficient de réduction est :

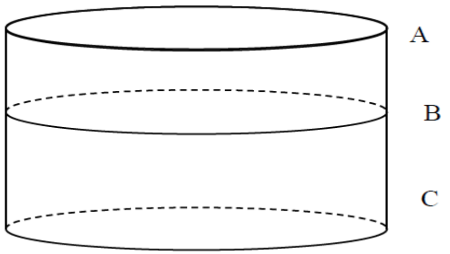
$$\frac{longueur\ réduite}{longueur\ initiale}=\underbrace{\frac{SM'}{SM}=\frac{O'M'}{OM}=\frac{SO'}{SO}}_{\text{C'est le théorème de Thalès.}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Le cône de hauteur SO et de rayon de base OM est un agrandissement du cône de hauteur SO' et de rayon de base O'M' .

Le coefficient d'agrandissement est :

$$\frac{\textit{longueur agrandie}}{\textit{longueur initiale}} = \underbrace{\frac{SM}{SM'} = \frac{OM}{O'M'} = \frac{SO}{SO'}}_{\textbf{C'est le théorème de Thalès.}} = \frac{12}{3} = 4$$

Attention !



Le cylindre de hauteur CB n'est pas une réduction du cylindre de hauteur CA :

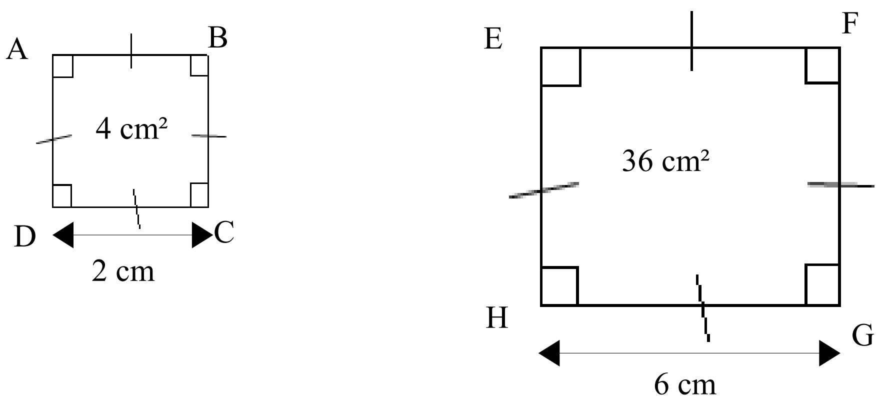
ils ont même rayon de base.

2) Quelles sont les propriétés des agrandissements/réductions ?

Propriété 1

Dans un agrandissement/réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

Exemple d'introduction de la propriété 2



Le carré EFGH est un agrandissement de coefficient 3 du carré de ABCD.

L'aire du carré a été multipliée par 9 = **3²** . En effet : **3²** × 4 = 36.

Propriété 2

Dans un agrandissement/réduction de rapport k :

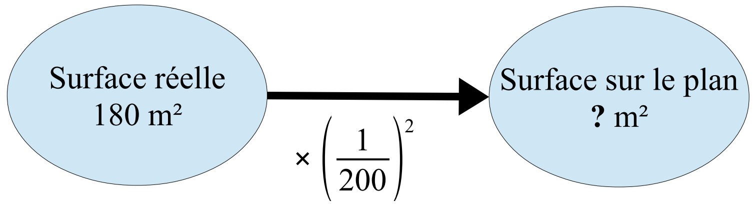
- **l'aire d'une surface est multipliée par k^2**

Exemple

Une propriété a une surface de 180 m². On réalise un plan à l'échelle 1/200 de cette propriété.

Calculer l'aire de cette propriété sur le plan.

Le plan est une réduction de la propriété de coefficient $\frac{1}{200}$.

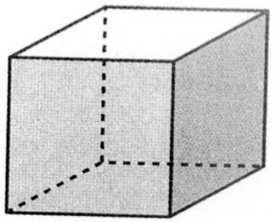


$? = \left(\frac{1}{200}\right)^2 \times 180$

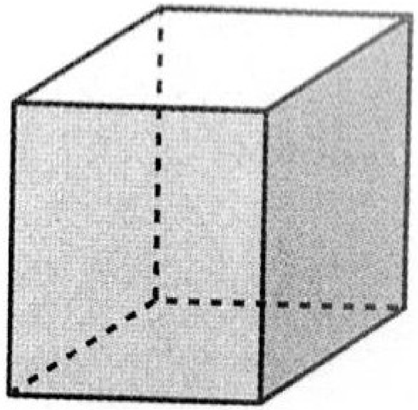
$? = \frac{1}{40\,000} \times 180$

? = 0,0045 m² = 45 cm².

Exemple d'introduction de la propriété 3



Cube d'arête 2 cm
Volume : 8 cm^3



Cube d'arête 6 cm
Volume : 216 cm^3

Le cube d'arête 6 cm est un agrandissement de coefficient 3 du cube d'arête 2 cm.

Volume : 8 cm^3 $\xrightarrow{\times 3^3 = 27}$ Volume : 216 cm^3

Propriété 3

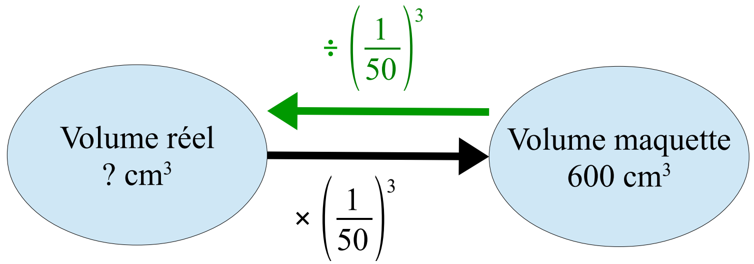
Dans un agrandissement/réduction de rapport k :

- **le volume d'un solide est multiplié par k^3 .**

Exemple

Une maquette d'un bâtiment à l'échelle 1/50 occupe un volume de 600 cm^3 .
Quel volume occupera le bâtiment en grandeur réelle ?

La maquette est une réduction du bâtiment de coefficient $\frac{1}{50}$.



$? = 600 \div \left(\frac{1}{50}\right)^3$

$? = 600 \div \left(\frac{1}{125\,000}\right)$

$? = 600 \times 125\,000$

$? = 75\,000\,000 \text{ cm}^3$

$? = 75\ m^3$

Pour compléter ce paragraphe, vous pouvez regarder la vidéo suivante :

https://www.youtube.com/watch?v=YBwMKghrSOE

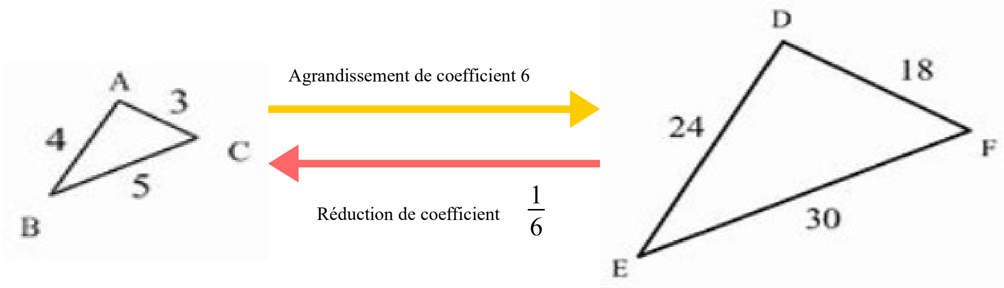
3) Que sont deux triangles semblables ?

Dans ce paragraphe, nous allons étudier des cas particuliers d'agrandissements et de réductions.

Définition

Deux triangles sont semblables si l'un des triangles est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

On dit aussi que ces triangles sont **de même forme.**



On obtient les longueurs du triangle EDF en multipliant par 6 les longueurs du triangle ABC. Les longueurs du triangle EDF sont proportionnelles aux longueurs du triangle ABC.

<u>Propriété</u>

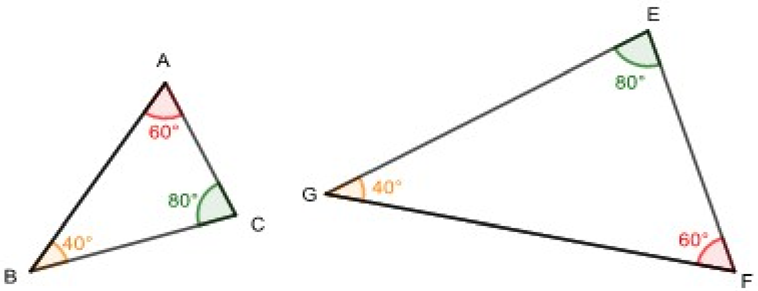
Dire que deux triangles sont semblables équivaut à dire que les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

Comme les angles sont conservés dans un agrandissement ou une réduction, deux triangles semblables ont leurs angles deux à deux de même mesure.

<u>Propriété</u>

Dire que deux triangles sont semblables équivaut à dire qu'ils ont deux angles deux à deux de même mesure.

<u>Exemple</u>



Les triangles ABC et EGF sont semblables car $\widehat{CBA}=\widehat{FGE}$, $\widehat{BAC}=\widehat{GFE}$ et $\widehat{BCA}=\widehat{GEF}$.

Pour compléter ce paragraphe, vous pouvez regarder les vidéo suivantes :

https://www.youtube.com/watch?v=F3SuRBTkaGM&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=chTB8q0cY9Q&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=Z-G-9Q9Vezc&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=0tB0jmrMaLc&feature=youtu.be

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir : **- les définitions d'un agrandissement et d'une réduction.** **- la définition d'un triangle semblable.** **- les propriétés des agrandissements/réductions.**	**Je dois savoir :** **- utiliser les propriétés des agrandissements/réductions.** **- reconnaître des triangles semblables.**