

Nombres et calculs (NC3)
Arithmétique : les nombres premiers, décomposition en facteurs premiers

« Dieu a fait le nombre entier, le reste est l'œuvre des hommes. »
Leopold Kronecker

Introduction

L'arithmétique est le domaine des mathématiques qui s'intéresse aux propriétés des nombres entiers. Dans cette leçon, nous allons comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers.

C'est l'école d'Alexandrie d'Euclide –300 ans avant JC qui énonça les premières propriétés. Aujourd'hui encore, l'Arithmétique a une place très importante dans les Mathématiques.

Certains vieux problèmes d'arithmétique ne sont toujours pas démontrés, notamment la conjecture de Goldbach (*tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers (le même nombre premier pouvant être utilisé deux fois)*). C'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres et des Mathématiques.

1) Comment vérifier si un nombre entier est divisible par 2, 3, 5 et 9 ? (rappel)

Critère de divisibilité par 2 et 5

Un nombre entier est divisible :

- par 2 si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Critère de divisibilité par 3 et 9

Un nombre entier est divisible :

- par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples

	239	324	5940	30165
Divisible par 2	Non	Oui	Oui	Non
Divisible par 3	Non	Oui	Oui	Oui
Divisible par 5	Non	Non	Oui	Oui
Divisible par 9	Non	Oui	Oui	Non

2) Qu'est ce qu'un nombre premier ?

Définition Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemple

- 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont des nombres premiers.
- Comme $6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$ alors 6 et 15 ne sont pas des nombres premiers.

Remarques

- 1 n'est pas un nombre premier.
- 2 est le seul nombre premier pair.
- Il existe une infinité de nombres premier. Le plus grand nombre premier connu aujourd'hui contient plus de 22 millions de chiffres.

Voici un algorithme permettant de trouver les nombres premiers inférieurs à un nombre donné. C'est le crible d'Erathostène (- 200 avant JC).

Exemple

Quels sont les nombres premiers inférieurs à 100 ?

Dans la grille ci-dessous :

- on a surligné en vert les multiples de 2. Comme ils sont multiples de 2 alors ils ne sont pas premiers.
- on a surligné en bleu les multiples de 3. Comme ils sont multiples de 3 alors ils ne sont pas premiers.
- on a surligné en rouge les multiples de 5. Comme ils sont multiples de 5 alors ils ne sont pas premiers.

- on a surligné en jaune les multiples de 7. Comme ils sont multiples de 7 alors ils ne sont pas premiers.

- les nombres restant sont **des nombres premiers**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Propriété On peut toujours décomposer un nombre non premier en produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemples

- $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$. Ainsi : $18 = 2 \times 3^2$.
- $840 = 2 \times 420$
 $= 2 \times 2 \times 210$
 $= 2 \times 2 \times 2 \times 105$
 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 35$
 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Ainsi : $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

La décomposition en facteurs premiers permet de trouver facilement les diviseurs d'un nombre, le plus grand commun diviseur (PGCD) et le plus petit commun multiple (PPCM).

Application 1

Pour décorer la salle de son restaurant, un cuisinier dispose de 42 roses et 24 tulipes qu'il veut répartir dans des vases contenant tous le même nombre de chacune de fleurs. Combien peut-il prévoir de vases au maximum ? Quel sera la composition de chaque vase ?

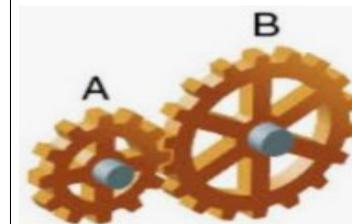
Le nombre de vases possibles est un diviseur de 42 et 24. Comme on veut prévoir un maximum de vases alors le nombre de vases possibles est le plus grand commun diviseur de 42 et 24.

$$\left. \begin{array}{l} 42 = 2 \times 3 \times 7 \\ 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{array} \right\} \text{PGCD}(42;24) = 6$$

Ainsi le cuisinier peut prévoir au maximum 6 vases et chaque vase contient 7 roses et 4 tulipes.

Application 2

Une roue d'engrenage A a 12 dents. Elle est en contact avec une roue B de 18 dents.



Au bout de combien de tour de chacune des roues seront-elle de nouveau et pour la première fois dans la même position ?

Pour que l'engrenage soit dans la même position, il faut que chaque roue ait fait un nombre entiers de tours, donc

A a tourné d'un nombre de dents multiple de 12

B a tourné d'un nombre de dents multiple de 18.

On cherche donc le plus petit commun multiple.

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3 \times 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{PPCM}(12;18) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36 \\ 36 = 3 \times 12 ; 36 = 2 \times 18 \end{array}$$

Pour revenir dans la même position , la roue A fait 3 tours et la roue B fait 2 tours.

Pour compléter ce paragraphe, vous pouvez regarder la vidéo suivante :
<https://www.youtube.com/watch?v=RBE2wPIKagI>

3. Qu'est ce qu'une fraction irréductible ?

Définition Soit a et b deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque 1 est le seul diviseur commun à a et b.

Remarque Si 1 est le seul diviseur commun à deux nombres a et b alors on dit que a et b sont premiers entre eux.

Exemple Comme 5 et 7 sont premiers entre eux alors $\frac{5}{7}$ est irréductible.

Méthode On peut simplifier facilement une fraction et la rendre irréductible en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

Exemple Simplifier la fraction $\frac{120}{84}$.
$$\frac{120}{84} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{10}{7}$$

Pour compléter ce paragraphe, vous pouvez regarder :
- le « Je comprends » page 44 du livre Myriade 3ème
- la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=qZaTliAWkA0>

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir : - la définition d'un nombre premier. - la définition d'une fraction irréductible.	Je dois savoir : - décomposer un nombre en facteurs premiers.