Les fonctions affines (OGF6)

On a vu la notion de fonctions (OGF4) puis un cas particulier de fonctions, les fonctions linéaires (OGF5).
Aujourd'hui on va découvrir un autre cas particulier de fonctions, les fonctions affines (*je vous en ai déjà parlé lorsqu'on a introduit les fonctions linéaires*).

<u>Voici différentes situations simples</u> :

1) Voici une offre rencontrée pour télécharger des films sur internet :

VideoPlay
Abonnement 9€/mois + 2€/film

Si on télécharge *x* films dans le mois, on va payer :

$2x + 9$

2) Un cinéma propose le tarif suivant :

Abonnement 48€/an + 4€/séance

Si on va *x* fois au cinéma dans l'année, on payera $4x + 48$.

3) Une plante mesure 3 cm et pousse 1,5 cm par semaine.

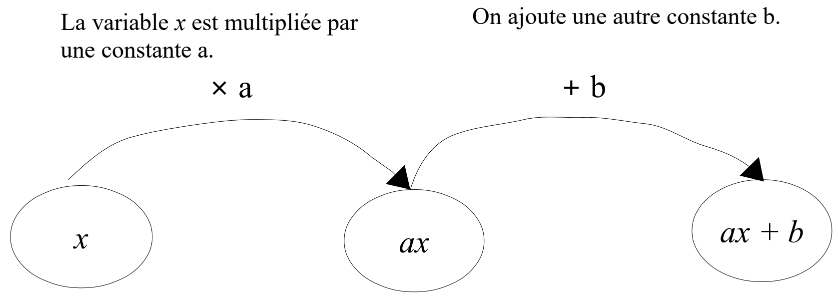
Au bout de *x* semaines, sa taille sera de $1{,}5x + 3$.

4) Pendant les plus froids mois d'hiver, un lac situé au nord du cercle polaire Arctique est couvert d'une couche de glace de 2 m d'épaisseur.

Lorsque le printemps arrive, l'air chaud fait petit à petit fondre la glace, et l'épaisseur de la couche de glace diminue de 75 cm par semaines.

Au bout de *x* semaines, l'épaisseur sera de $2 - 0{,}75x = -0{,}75x + 2$.

Les quatre expressions algébriques ont un point commun :

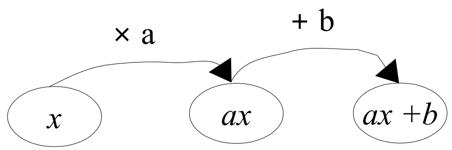


Ce types de situations se rencontrent souvent dans la vie courante.

C'est pourquoi, nous avons besoin de la notion de fonctions affines dont voici la définition :

<u>1) Qu'est-ce qu'une fonction affine ?</u>

<u>Définition</u> Considérons a et b deux nombres quelconques.
La fonction qui à tout nombre x associe le nombre $ax+b$ est une **fonction affine**.



Pour calculer l'image du nombre *x* par la fonction affine $x \longmapsto ax + b$, on multiplie *x* par *a* puis on ajoute *b*.

Si on appelle f cette fonction , alors on note : $f : x \longmapsto ax + b$

Exemple 1 $f : x \longmapsto 3x + 4$ est une fonction affine ($a=3$ et $b=4$).

- Quelle est l'image de -2 par la fonction f ?

$f(-2) = 3 \times (-2) + 4$
$= -6 + 4$
$= -2$

- Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par la fonction f .

On doit résoudre l'équation : $3x + 4 = 5$

$$3x + 4 - 4 = 5 - 4$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Donc 5 possède un seul antécédent $\frac{1}{3}$.

Exemple 2 $g : x \longmapsto -2x - 5$ est une fonction affine ($a=-2$ et $b=-5$).

- Quelle est l'image de - 6 par la fonction g ?

$g(-6) = -2 \times (-6) - 5$
$= 12 - 5$
$= 7$

- Déterminer le(s) antécédent(s) de 8 par la fonction g .

On doit résoudre l'équation : $-2x - 5 = 8$

$$-2x - 5 + 5 = 8 + 5$$
$$-2x = 13$$
$$x = \frac{13}{-2}$$
$$x = -6{,}5$$

Donc 8 possède un seul antécédent -6,5.

Exemple 3 On considère h la fonction définie par $h(x) = (x+1)^2 - x^2$.

La fonction h est -elle affine ?

On a : $h(x) = (x+1)^2 - x^2$
$= (x+1)(x+1) - x^2$
$= x^2 + x + x + 1 - x^2$
$= 2x + 1$

On utilise la double distributivité.

Donc h est une fonction affine.

Remarques importantes

- Lorsque $b = 0$, $x \longmapsto ax$ est une fonction affine particulière : c'est une **fonction linéaire.**
- Lorsque a $= 0$, $x \longmapsto b$ est une fonction affine particulière : c'est une **fonction constante**.
  L'image d'un nombre quelconque est toujours égale à b.

2)Comment représenter une fonction affine ?

Propriété **La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.**

Exemple 1 Représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto 2x - 3$.

La fonction f est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.
Pour tracer une droite, il suffit d'en connaître deux points distincts.

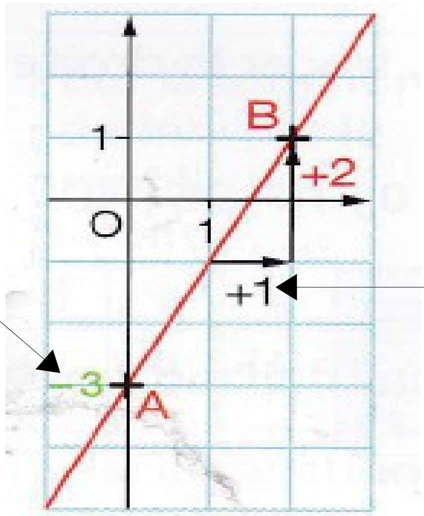
On établit donc un tableau de valeurs :

x	0	2
$f(x)$	-3	1

La droite passe par le point A(0 ; -3).

La droite passe par le point B(2 ; 1).

Le coefficient – 3 est appelé **l'ordonnée à l'origine.**



Quand x augmente de 1, f(x) augmente de 2.

Le coefficient 2 donne la direction de la droite.

Il est appelé le **coefficient directeur**.

Revenons à la phrase « Quand x augmente de 1, f(x) augmente de 2 » :
Vérifions que c'est vrai sur un exemple :

$$f(2) - f(1) = 1 - (-1) = \mathbf{2}$$

x a augmenté de 1

De même :

$$f(5) - f(4) = \mathbf{2}$$
$$f(8) - f(7) = \mathbf{2}$$
$$f(14) - f(13) = \mathbf{2}$$

…..etc....

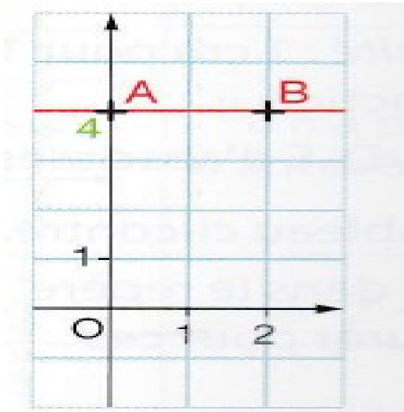
<u>Exemple 2</u> Représenter graphiquement la fonction $g : x \longmapsto 4$.

La fonction g est une fonction constante donc sa représentation graphique est une droite.
On établit donc un tableau de valeurs :

x	0	2
$g(x)$	4	4

La droite passe par le point A(0 ; 4).

La droite passe par le point B(2 ; 4).



La droite est parallèle à l'axe des abscisses.

<u>Exemple 3</u> Représenter graphiquement la fonction $h : x \longmapsto -3x + 2$.

La fonction h est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite.
Pour tracer une droite, il suffit d'en connaître deux points distincts.

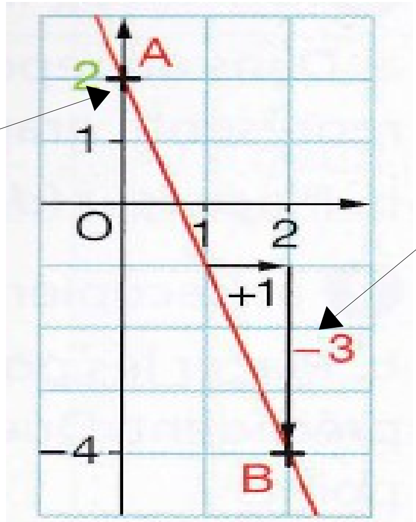
On établit donc un tableau de valeurs :

x	0	2
$h(x)$	2	-4

La droite passe par le point A(0 ; 2).

La droite passe par le point B(2 ; -4).

Le coefficient 2 est appelé **l'ordonnée à l'origine.**



Quand x augmente de 1, h(x) diminue de 3.

Le coefficient -3 donne la direction de la droite.

Il est appelé le **coefficient directeur**.

Savoirs	Savoir-faire
Je dois savoir : **- la définition d'une fonction affine**	**Je dois savoir :** **- déterminer l'image d'un nombre par une fonction affine** **- déterminer l'antécédent d'un nombre par une fonction affine** **- tracer la représentation graphique d'une fonction affine**

Pour compléter cette leçon et avoir d'autres explications, vous pouvez regarder la vidéo suivante.
Cette vidéo est un peu longue mais elle reprend tout le cours :

https://www.youtube.com/watch?v=n5_pRx4ozIg