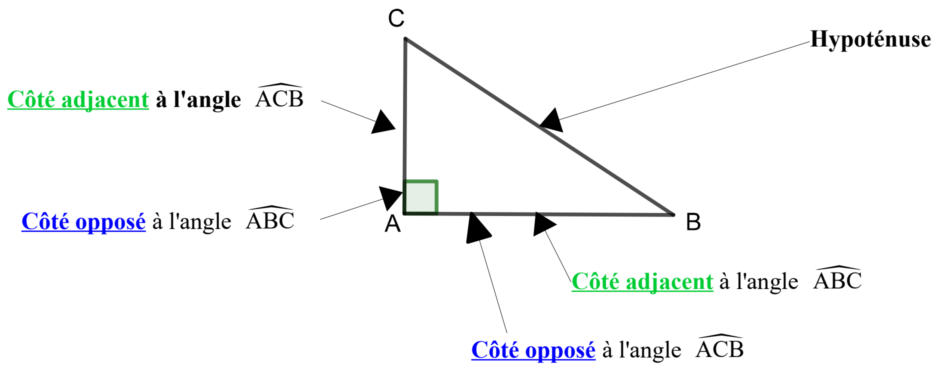
Trigonométrie (EG9)

La trigonométrie (du grec trigônon, triangle; metron, mesure) est une branche des Mathématiques ayant pour objet l'étude des triangles et des relations qui existent entre les angles et les côtés d'un triangle.

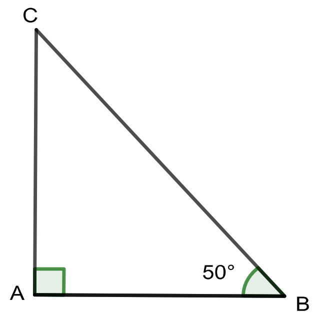
Dans la suite, nous allons étudier les relations trigonométriques dans **le triangle rectangle.**

1) Qu'est-ce que le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu ?

Avant d'introduire les définitions, voici un peu de vocabulaire :
On considère ABC un triangle rectangle en A.



A l'aide de Geogebra, si on trace le triangle ci-contre, on remarque qu'en déplaçant les points B et C, **les quotients** $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AC}{AB}$ **sont indépendants des longueurs des côtés du triangle. Ils dépendent donc seulement de la mesure 50° de l'angle de** $\widehat{ABC}$ **.**



C'est pour cela qu'on peut définir les notions de cosinus, de sinus et de tangente d'un angle aigu dans **un triangle rectangle** :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

Ce quotient est appelé le **cosinus** de l'angle $\widehat{ABC}$. On le note cos $\widehat{ABC}$.

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

Ce quotient est appelé le **sinus** de l'angle $\widehat{ABC}$. On le note sin $\widehat{ABC}$.

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

Ce quotient est appelé la **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$. On le note tan $\widehat{ABC}$.

Voici un acronyme **CAH SOH TOA** permettant de retenir ces trois définitions :

Casse-toi !

CAH ⇒ Cosinus — Adjacent — Hypoténuse
SOH ⇒ Sinus — Opposé — Hypoténuse
TOA ⇒ Tangente — Opposé — Adjacent

Exemple
Dans le triangle ABC rectangle en A précédent, on a :

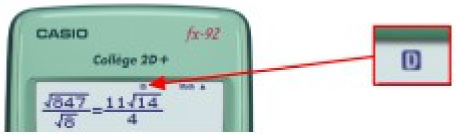
$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} \quad , \quad \tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$$

Remarques

- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont les quotients de deux longueurs donc **le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont des nombres positifs.**
- Comme l'hypoténuse dans un triangle rectangle est le côté le plus grand alors **le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres toujours compris entre 0 et 1.**

Calculatrice scientifique

Attention la calculatrice doit être programmée en degré.



Les calculatrices scientifiques sont utiles :

- pour déterminer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle dont on connaît la mesure en degré.

  On utilise les touches 

Exemples

cos 30° ≈ 0,86 (valeur approchée décimale par défaut à 0,01 près)
sin 56° ≈ 0,82 (valeur approchée décimale par défaut à 0,01 près)
cos 60° = 0,5
tan 60° ≈ 1,73 (valeur approchée décimale par défaut à 0,01 près)

Le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu possèdent rarement une écriture décimale, souvent on utilisera des écritures décimales approchées.

- pour déterminer la mesure d'un angle dont on connaît la valeur du sinus, du cosinus ou de la tangente.

  On utilise les touches Arcsin, Arccos, Arctan 

Exemples

Calculer l'angle $\widehat{A}$ tel que cos $\widehat{A}$ = 0,42.

On tape : $\underbrace{\text{seconde cos 0,42 EXE}}_{\text{La calculatrice affiche Arccos}}$ → 65,16541251 .

Donc : $\widehat{A}$ ≈ 65° (valeur approchée au degré près)

Calculer l'angle $\widehat{A}$ tel que tan $\widehat{A}$ = 1,72.

On tape : $\underbrace{\text{seconde tan 1,72 EXE}}_{\text{La calculatrice affiche Arccos}}$ → 59,82647997.

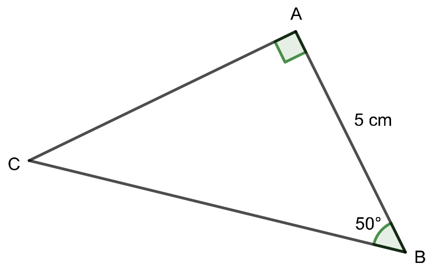
Donc : $\widehat{A}$ ≈ 60° (valeur approchée au degré près)

Exercices 1, 2, 3, 4, 5 page 222 : exercices sur les définitions du cos, sin et tan.

2) **A quoi servent ces formules ?**

Les formules de trigonométrie sont des relations entre les longueurs de deux côtés et un angle aigu d'un triangle rectangle.
Connaissant deux valeurs, on peut donc trouver la 3ème.

Exemple 1



Calcul de BC

On connaît l'angle $\widehat{ABC}$ et AB (le côté adjacent à $\widehat{ABC}$).
*On cherche BC (l'hypoténuse).On utilise donc **le cosinus**.*

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

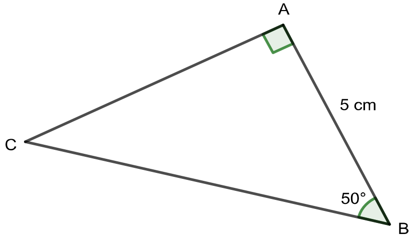
$\cos 50° = \dfrac{5}{BC}$

$\dfrac{\cos 50°}{1} = \dfrac{5}{BC}$ **On utilise le produit en croix.**

$BC = \dfrac{5 \times 1}{\cos 50°}$ (valeur exacte)

BC ≈ 7,8 cm (valeur approchée au mm)

Exemple 2



Calcul de AC

On connaît l'angle $\widehat{ABC}$ et AB (le côté adjacent à $\widehat{ABC}$).
On cherche AC (le côté opposé à $\widehat{ABC}$).
*On utilise donc **la tangente**.*

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

$\tan 50° = \dfrac{AC}{5}$

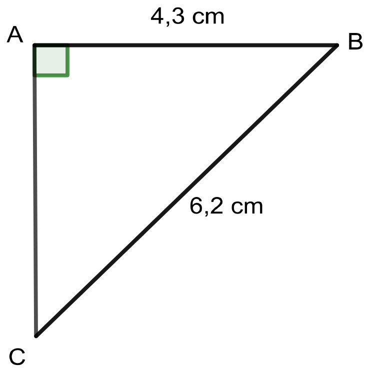
$\dfrac{\tan 50^{\circ}}{1} = \dfrac{AC}{5}$ **On utilise le produit en croix.**

$BC = \dfrac{5 \times \tan 50°}{1}$ (valeur exacte)

$BC = 5 \times \tan 50°$ (valeur exacte)

$BC \approx 6$ cm (valeur approchée au mm)

Exemple 3



Calcul de $\widehat{ABC}$

On connaît AB (le côté adjacent à $\widehat{ABC}$) et BC (l'hypoténuse).
On cherche $\widehat{ABC}$.
*On utilise donc **le cosinus**.*

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

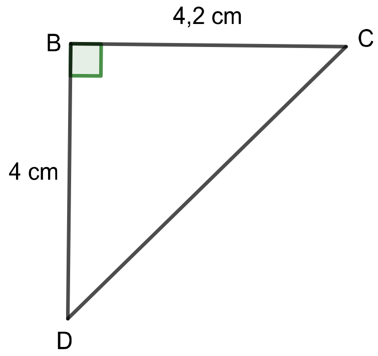
$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{4{,}3}{6{,}2}$

d'où : $\widehat{ABC} \approx 46°$ (valeur arrondie au degré près)

A la calculatrice, on tape : seconde cos 4,3 ÷ 6,2 EXE

Exemple 4



Calcul de $\widehat{BCD}$

On connaît BC (le côté adjacent à $\widehat{BCD}$) et BD (le côté opposé à $\widehat{BCD}$).
On cherche $\widehat{BCD}$.
*On utilise donc **la tangente**.*

Dans le triangle BCD rectangle en B, on a :

$\tan \widehat{BCD} = \dfrac{BD}{BC}$

$\tan \widehat{BCD} = \dfrac{4}{4{,}2}$

d'où : $\widehat{BCD} \approx 44°$ (valeur arrondie au degré près)

A la calculatrice, on tape : seconde tan 4 ÷ 4,2 EXE

Exercices 31, 32, 33, 34 … page 226, exercice 43 page 227
Exercices 17, 18, 19, 20, … page 224, exercice 28 page 225

Pour compléter vous pouvez regarder la vidéo suivante :
https://www.youtube.com/watch?v=DfgUYXB5_jg
Sur le site https://www.maths-et-tiques.fr/, vous pouvez trouver d'autres vidéos très intéressantes.

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir : **- les trois formules de trigonométrie (cosinus, sinus et tangente)**	**Je dois savoir :** **- calculer une longueur dans un triangle rectangle connaissant une autre longueur et la mesure d'un angle.** **- calculer la mesure d'un angle connaissant deux longueurs dans un triangle rectangle.**