Calcul fractionnaire (NC1)

Dans de nombreux problèmes de la vie quotidienne, nous avons besoin d'effectuer des opérations avec des quotients.
Dans cette leçon, nous allons revoir les opérations avec les quotients.

1) Comment vérifier que deux quotients sont égaux ?

Pour vérifier si deux quotients sont ou ne sont pas égaux on peut utiliser l'une de ces deux propriétés ci-dessous.

Propriété

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ **signifie que ad = bc (avec** $b\neq 0$ **et** $d\neq 0$**)**

Autrement dit, vérifier l'égalité de deux quotients revient à vérifier l'égalité des produits en croix.

Exemples

- Les quotients $\frac{3{,}1}{4{,}1}$ et $\frac{3}{4}$ sont- ils égaux?

  Comme $3{,}1\times4=12{,}4$ et $4{,}1\times3=12{,}3$ alors $\frac{3{,}1}{4{,}1}\neq\frac{3}{4}$.

- Les quotients $\frac{4{,}5}{150}$ et $\frac{21}{700}$ sont- ils égaux?

  Comme $4{,}5\times700=3150$ et $21\times150=3150$ alors $\frac{4{,}5}{150}\neq\frac{21}{700}$.

Propriété

On ne change pas la valeur d'un quotient lorsque l'on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

Exemples

- Les quotients $\frac{3{,}8}{7}$ et $\frac{19}{35}$ sont- ils égaux?

  $\frac{3{,}8}{7}=\frac{3{,}8\times5}{7\times5}=\frac{19}{35}$

- Les quotients $\frac{1{,}458}{35{,}7}$ et $\frac{1458}{35700}$ sont- ils égaux?

  $\frac{1{,}458}{35{,}7}=\frac{1{,}458\times1000}{35{,}7\times1000}=\frac{1458}{35700}$

- Les quotients $\frac{4{,}3}{5{,}6}$ et $\frac{2{,}15}{2{,}7}$ sont- ils égaux?

  Comme $\frac{4{,}3}{5{,}6}=\frac{4{,}3\div2}{5{,}6\div2}=\frac{2{,}15}{2{,}8}$ alors $\frac{4{,}3}{5{,}6}\neq\frac{2{,}15}{2{,}7}$.

Remarque

Avant d'utiliser l'une de ces deux propriétés, on regarde si on ne peut pas calculer !

Exemple : Comme $\frac{21}{10}=2{,}1$ et $\frac{8{,}8}{4}=2{,}2$ alors $\frac{21}{10}\neq\frac{8{,}8}{4}$.

2) Comment additionner et soustraire deux quotients ?

Exemple 1

Pierre a mangé les $\frac{2}{3}$ de la pizza et sa sœur Clara en a mangé $\frac{1}{5}$.

En reste-t-il pour leur frère Polo ?

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}$$

On a mis sous le même dénominateur.

$$=\frac{13}{15}$$

Pierre et Clara ont mangé $\frac{13}{15}$ de la pizza. Il en reste $\frac{2}{15}$ pour Polo.

Exemple 2

$$A = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{18}$$
$$A = \left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)-\frac{7}{18}$$
$$A = \frac{5}{6}-\frac{7}{18}$$
$$A = \frac{15}{18}-\frac{7}{18}$$
$$A = \frac{8}{18}$$
$$A = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

On écrit le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

3) Comment multiplier deux quotients ?

La propriété suivante permet de multiplier plusieurs quotients:

Propriété

Pour multiplier plusieurs quotients:
1) on multiplie les numérateurs entre eux
2) on multiplie les dénominateurs entre eux

Exemple 1

$$A = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$$
$$A = \frac{2\times3}{3\times5}$$
$$A = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

On simplifie par 3.

Exemple 2

$$B = \frac{45}{22}\times\frac{33}{27}$$
$$B = \frac{45\times33}{22\times27}$$
$$B = \frac{5\times3\times3\times3\times11}{2\times11\times3\times3\times3}$$
$$B = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

On décompose en produit de facteurs premiers.

On simplifie.

Exemple 3

$$C = \frac{5}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}$$
$$C = \frac{5}{3}-\frac{4}{15}$$
$$C = \frac{25}{15}-\frac{4}{15}$$
$$C = \frac{21}{15}$$
$$C = \mathbf{\frac{7}{5}}$$

La multiplication est prioritaire.

Exemple 4

Dans une bouteille, il reste $\frac{3}{4}$ de litre d'eau. Polo en boit les deux tiers.

Quelle quantité d'eau a bu Polo ?

Pour calculer les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, on effectue l'opération $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$.

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{3\times2\times2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

Donc Polo a bu $\mathbf{\frac{1}{2}}$ litre d'eau.

4) Qu'est-ce que l'inverse d'un nombre ?

Définition **Deux nombres sont inverses lorsque leur produit vaut un.**

Si a est un nombre non nul, l'inverse du nombre a *se note* $\mathbf{\frac{1}{a}}$.

$$a\times\frac{1}{a}=1$$

Exemples

- Comme 2 × $\frac{1}{2}$ = 1 alors $\frac{1}{2}$ est l'inverse de 2 et 2 est l'inverse de $\frac{1}{2}$.
- Comme 0,25 × 4 = 1 alors 0,25 = $\frac{1}{4}$ est l'inverse de 4.

Attention !

- 0 n' a pas d'inverse. Pourquoi ?
- Ne pas confondre l'opposé et l'inverse d'un nombre.

Propriété a et b sont deux nombres non nuls.

L'inverse de $\mathbf{\frac{a}{b}}$ est $\mathbf{\frac{b}{a}}$.

Démonstration $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=1$

<u>Exemples</u>

- L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$.
- L'inverse de $-\frac{5}{7}$ est $\frac{7}{-5}$.

<u>5) Comment diviser deux quotients ?</u>

<u>Règle</u> **Diviser par un nombre (non nul) revient à multiplier par son inverse.**

Si a, b, c ,d désignent des nombres ($b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$) , alors :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

<u>Exemple 1</u>

$$A = \frac{2}{3} \div \frac{9}{7}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{9}$$
$$= \mathbf{\frac{14}{27}}$$

<u>Exemple 2</u>

$$B = \frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$$
$$= \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$$
$$= \mathbf{\frac{3}{10}}$$

<u>Exemple 3</u>

Combien de bouteilles de $\frac{3}{4}$ de litre peut-on remplir avec 24 litres de vin ?

On cherche à savoir combien de « paquets » de ¾ peut-on faire dans 24 ?

$$24 \div \frac{3}{4} = 24 \times \frac{4}{3}$$
$$= \frac{24 \times 4}{3}$$
$$= \frac{3 \times 8 \times 4}{3}$$
$$= 32$$

Avec 24 litres de vin, on peut remplir **32 bouteilles** de 0,75 cL.

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
Je dois savoir : **- la définition de l'inverse d'un nombre**	**Je dois savoir :** **- vérifier que deux quotients sont égaux.** **- additionner, soustraire, multiplier et diviser deux quotients.**

Pour compléter cette leçon, vous pouvez regarder les vidéos suivantes :

https://www.youtube.com/watch?v=Z86gfJOKgBg

https://www.youtube.com/watch?v=1yV5scwCwvg